TEMA 2: APLICACIONES LINEALES

1 Aplicación Lineal u Homomorfismo

Definición 1.1. Sean V y W e.v. sobre $I\!K$, una aplicación $f : V \longrightarrow W$ se dice que es una **Aplicación Lineal (a.l.)** u **Homomorfismo** si y sólo si $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in I\!K$

EPIMORFISMO: es una a.l. u homomorfismo suprayectivo.

MONOMORFISMO: es una a.l. inyectiva.

ISOMORFISMO: es una a.l. biyectiva.

ENDOMORFISMO: es una a.l. de un espacio vectorial en sí mismo.

AUTOMORFISMO: es una a.l. de un e.v. en sí mismo biyectiva (endomorfismo biyectivo).

Ejemplo 1.2.

- Las aplicaciones $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ tal que $f(x, y) = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ (homotecia) y $f(x, y) = (x, -y)$ (simetría respecto del eje x) son aplicaciones lineales.

- $f : I\!R^2 \to I\!R^3$ tal que $f(x, y) = (x - y, 2x, -x + 3y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una aplicación lineal.

  Además, podemos escribir $f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y se llamará aplicación lineal u homomorfismo asociado a la matriz A. También se puede escribir en forma de ecuación, $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x \\ z' = -x + 3y \end{cases}$

  En general, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $f : I\!R^n \to I\!R^m$ tal que $f(x_1, \dots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es la aplicación lineal asociada a la matriz A. En forma de ecuación nos queda

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \quad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Sea V un espacio vectorial y $V = S \oplus T \Rightarrow \forall \vec{x} \in V$, $\vec{x} = \vec{s} + \vec{t}$ con $\vec{s} \in S$ y $\vec{t} \in T$, las aplicaciones $\begin{array}{cccc} p_1 : & V & \longrightarrow & V \\ & \vec{x} & \mapsto & \vec{s} \end{array}$ y $\begin{array}{cccc} p_2 : & V & \longrightarrow & V \\ & \vec{x} & \mapsto & \vec{t} \end{array}$ llamadas **proyecciones** sobre S y T respectivamente, son homomorfismos. Por ejemplo, si tomamos $I\!R^2 = S \oplus T$ con $S = \{(x, y)/x = y\}$ y $T = \{(x, y)/y = 0\}$ tenemos la siguiente descomposición de un vector de $I\!R^2$ como un vector de S más un vector de T; $(x, y) = (y, y) + (x - y, 0)$. Así las proyecciones sobre S y T nos quedan,

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (y, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{cccc} f_2 : & I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x - y, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- La siguiente aplicación $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_{2x2}(I\!R) & \longrightarrow & I\!R \\ & A & \mapsto & det(A) \end{array}$ NO es una aplicación lineal ya que

$$det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 \quad \text{y sin embargo} \quad det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

  Es decir, no cumple que el determinante de la suma sea la suma de los determinantes.

- Veamos un ejemplo de NO aplicación. En $\mathbb{R}^3$ tomamos $\pi = \{(x,y,z)/y=0\}$ y $\pi' = \{(x,y,z)/z=0\}$ se verifica que $\mathbb{R}^3 = \pi + \pi'$ pero $\pi \cap \pi' \neq \{(0,0,0)\}$ (es decir, no son suma directa). Las proyecciones sobre π y π' NO son aplicaciones ya que por ejemplo

$$(1,1,1) = \underbrace{(\frac{1}{2},0,1)}_{\in\pi} + \underbrace{(\frac{1}{2},1,0)}_{\in\pi'} = \underbrace{(1,0,1)}_{\in\pi} + \underbrace{(0,1,0)}_{\in\pi'} \Longrightarrow \begin{array}{l} p_\pi(1,1,1) = (\frac{1}{2},0,1) \text{ ó } (1,0,1) \Longrightarrow p_\pi \text{ No aplic.} \\ p_{\pi'}(1,1,1) = (\frac{1}{2},1,0) \text{ ó } (0,1,0) \Longrightarrow p_{\pi'} \text{ No aplic.} \end{array}$$

Propiedades 1.3. Sean V y W e.v. y $f: V \longrightarrow W$ una a.l. u homomorfismo. Se verifica:

- f($\vec{0}$) = $\vec{0}$; f(-$\vec{x}$) = -f($\vec{x}$) $\forall\ \vec{x} \in$ V.
- Si S s.v. de V $\Longrightarrow$ f(S) s.v. de W.
- A$\subset$V; f(L(A)) = L(f(A)). En consecuencia, si A es s.g. del s.v. S $\Longrightarrow$ f(A) es s.g. del s.v. f(S).
- Si S' s.v. de W $\Longrightarrow$ f^{-1}(S') s.v. de V. (f^{-1}(S')=$\{\vec{x} \in V/f(\vec{x}) \in S'\}$)

Definición 1.4. Sean V y W e.v. y $f: V \longrightarrow W$ una a.l. u homomorfismo. Definimos

$$\text{Im}f \equiv \{f(\vec{x}) \in W/\vec{x} \in V\} = \text{f(V)} \quad (\text{Imagen de } f) \Longrightarrow \text{Im}f \text{ es s.v. de W}$$

$$\ker f \equiv \{\vec{x} \in V/f(\vec{x}) = \vec{0}\} = \text{f}^{-1}(\{\ \vec{0}\ \}) \quad (\text{Núcleo de } f) \Longrightarrow \ker f \text{ es s.v. de V}$$

Observación: Si B=$\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ es base de V $\Longrightarrow$ Imf=L$\{f(\vec{e}_1),\ldots,f(\vec{e}_n)\}$ (**Nota:** Es suficiente con B s.g.)

Teorema 1.5. Sean V y W e.v. y $f: V \longrightarrow W$ una a.l. Se verifica

a) f suprayectiva $\Longleftrightarrow$ Imf = W (f suprayectiva si y sólo si $\forall\vec{y} \in W, \exists\vec{x} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{y}$ ó $f(V) = W$)

b) f inyectiva $\Longleftrightarrow$ ker$f$ = $\{\vec{0}\}$ (f inyectiva si y sólo si $\forall\vec{x},\vec{y} \in V, \vec{x} \neq \vec{y}$ se verifica $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$)

Demostración:
a) Trivial por definición de aplicación suprayectiva y porque Imf=$f(V)$.
b) ($\Rightarrow$) Sea $\vec{x} \in$ker$f$ $\Rightarrow f(\vec{x}) = \vec{0}$ y como $f(\vec{0}) = \vec{0}$ y f inyectiva $\Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$ ker$f$=$\{\vec{0}\}$
($\Leftarrow$) Sean $\vec{x},\vec{y} \in V$ tal que $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}-\vec{y} \in \ker f \Rightarrow \vec{x}-\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$
Luego f es inyectiva. ■

Ejemplo 1.6. Sea $A \in \mathcal{M}_{mxn}(I\!R)$ y sea $f: I\!R^n \longrightarrow I\!R^m$ la aplicación lineal asociada a la matriz A, es decir, $f(x_1,\ldots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Para calcular ker$f$ planteamos el sistema homogéneo $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y lo resolvemos. Para calcular Imf, las columnas de A forman un sistema de generadores de Imf (ya que $f(B_c^{I\!R^n})$ s.g. de Imf y $f(0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0)$ = columna i-ésima de A).

1. $f: I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ tal que $f(x,y) = (x+y, x-y, 2x+3y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   ker$f$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow kerf = \{(0,0)\} \Rightarrow f$ inyectiva

   Imf=$L\{f(1,0) = (1,1,2), f(0,1) = (1,-1,3)\} \Rightarrow dimImf < 3 \Rightarrow f$ No suprayectiva

2. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_3 \\ y_2 = -x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = 2x_2 - 3x_3 \\ y_4 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

   a) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $kerf$ e imf.

$$kerf: \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Ecs. Implícitas de } kerf \quad \Longrightarrow \quad kerf = \{(0,0,0)\}$$

$$M(f, B_c, B_c) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{rg\,3} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \overset{f(1,0,0)}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \lambda_2 \overset{f(0,1,0)}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda_3 \overset{f(0,0,1)}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \text{Ecs. Param. de } Imf$$

   Eliminando λ_1, λ_2 y λ_3 obtenemos las ecuaciones implícitas de la Imf.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & y_1 \\ -1 & -1 & -1 & y_2 \\ 0 & 2 & -3 & y_3 \\ 1 & 0 & -1 & y_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 2 & -3 & y_3 \\ 0 & 0 & -3 & y_4 - y_1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & -3 & -y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & -1 & 2y_1 + 2y_2 + y_3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & -3 & -y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 7y_1 + 6y_2 + 3y_3 - y_4 \end{array}\right) \Longrightarrow \quad 7y_1 + 6y_2 + 3y_3 - y_4 = 0 \quad \text{Ecs. Imp. de } Imf$$

   b) Si $T = L(1,1,-1,0), (0,1,1,2)$, calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $f^{-1}(T)$.

$$f^{-1}(T) = \{(x_1,x_2,x_3)/f(x_1,x_2,x_3) = \mu_1(1,1,-1,0) + \mu_2(0,1,1,2)\} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = \mu_1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = \mu_1 + \mu_2 \\ 2x_2 - 3x_3 = -\mu_1 + \mu_2 \\ x_1 - x_3 = 2\mu_2 \end{cases}$$

   Eliminando los parámetros μ_1 y μ_2 en las ecuaciones anteriores, obtenemos las ecuaciones implícitas de $f^{-1}(T)$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 + 2x_3 \\ 1 & 1 & -x_1 - x_2 - x_3 \\ -1 & 1 & 2x_2 - 3x_3 \\ 0 & 2 & x_1 - x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 + 2x_3 \\ 0 & 2 & x_1 - x_3 \\ 0 & 1 & -2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 0 & 1 & x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 + 2x_3 \\ 0 & 2 & x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & -2x_1 - x_2 - 3x_3 - \frac{x_1 - x_3}{2} \\ 0 & 0 & x_1 + 2x_2 - x_3 - \frac{x_1 - x_3}{2} \end{array}\right)$$

Por tanto $\left\{\begin{array}{ll} -5x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 & \text{Ecs. Imp.} \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 & \text{de } f^{-1}(T) \end{array}\right.$

Resolviendo el sistema homogéneo anterior obtenemos las ecuaciones paramétricas de $f^{-1}(T)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -\frac{11}{9}\lambda \\ x_2 = \frac{5}{9}\lambda \\ x_3 = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow B_{f^{-1}(T)} = \{(-11, 5, 9)\}$$

1.1 Construcción de a.l. u Homomorfismos

Veamos que un homomorfismo queda perfectamente definido dadas las imágenes de los vectores de una base.

Teorema 1.7. Sean V y W e.v. con B=$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ base de V y sea $\underbrace{\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}}_{\text{puede haber repetición}}$ $\subset$W. Entonces, existe una única a.l. u homomorfismo $f : V \longrightarrow W$ tal que f($\vec{e}_i$) $= \vec{w}_i \quad \forall\ i = 1 \ldots n$.

Demostración: Sea $\vec{x} \in V$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Definimos $f: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) = x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_n\vec{w}_n \end{array}$

Veamos que f está bien definida, es decir es aplicación, es lineal, verifica que $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ y además es única.

- f está bien definida ya que $f(\vec{x})$ único por la unicidad de las coordenadas.
- f homomorfismo: sean $\vec{x}, \vec{y} \in V$ y $\alpha, \beta \in I\!K$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$
  $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1)\vec{e}_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)\vec{e}_n \Rightarrow f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = (\alpha x_1 + \beta y_1)\vec{w}_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)\vec{w}_n = \alpha(x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_n\vec{w}_n) + \beta(y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_n\vec{w}_n) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.
- Además, $f(\vec{e}_i) = f(0\vec{e}_1 + \cdots + 1\vec{e}_i + \cdots + 0\vec{e}_n) = 0\vec{w}_1 + \cdots + 1\vec{w}_i + \cdots + 0\vec{w}_n = \vec{w}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.
- Unicidad: supongamos que existe $g : V \longrightarrow W$ a.l. tal que $g(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$. Sea $\vec{x} \in V$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$
  $\Rightarrow g(\vec{x}) = g(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1 g(\vec{e}_1) + \cdots + x_n g(\vec{e}_n) = x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_n\vec{w}_n = f(\vec{x})$

■

Veamos, mediante operaciones elementales, como saber si dados los transformados de un conjunto arbitrario de vectores si estas transformaciones definen o no un homomorfismo, y en caso de definirlo si es único o no.

Sea V un e.v. con *dim*V=n, W un e.v. con *dim*W=m y sea $f : V \longrightarrow W$ tal que f($\vec{x}_1$)=$\vec{y}_1$,...,f($\vec{x}_k$)=$\vec{y}_k$. ¿Es f homomorfismo?. Sea B base de V y B' base de W. Sean $(x_{i1}, \ldots, x_{in})$ las coordenadas de $\vec{x}_i$ en B y sean $(y_{i1}, \ldots, y_{im})$ las coordenadas de $\vec{y}_i$ en B', $\forall\ i = 1, \ldots, k$. Consideramos la siguiente matriz

$$(\text{A} \mid \text{B}) = \left(\begin{array}{c|c} x_{11} \ldots x_{1n} & y_{11} \ldots y_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k1} \ldots x_{kn} & y_{k1} \ldots y_{km} \end{array}\right)$$

Se verifica:

- Si rg(A) = rg(A|B) =n $\Longrightarrow$ f homomorfismo único.
- Si rg(A) = rg(A|B) < n $\Longrightarrow$ existen infinitos homomorfismos tal que f($\vec{x}_1$)=$\vec{y}_1$, ..., f($\vec{x}_k$)=$\vec{y}_k$.
  Para construir cualquiera de estos homomorfismos hacemos lo siguiente: del conjunto $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ nos quedamos con los que sean l.i. Sean $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r\}$ l.i. y por el teorema de extensión de la base existen $\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n$ vectores de V tal que $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ base de V. Ahora hacemos f($\vec{x}_1$)=$\vec{y}_1$, ..., f($\vec{x}_r$)=$\vec{y}_r$ y f($\vec{v}_{r+1}$),...,f($\vec{v}_n$) cualesquiera vectores de W.
- Si rg(A) < rg(A|B) $\Longrightarrow$ f NO homomorfismo.

Ejemplo 1.8. Averiguar si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un homomorfismo y en caso afirmativo, analizar si es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

a) $f(1,-1,0)=(2,1),\ f(0,-1,2)=(1,1),\ f(3,0,1)=(0,3)$

$$rg\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=3 \implies \text{forman base} \implies f \text{ homomorfismo}$$

$$Imf=L\{(2,1),(1,1),(0,3)\}=L\{(2,1),(1,1)\}=\mathbb{R}^2 \implies f \text{ Epimorfismo}$$

$kerf$: Para encontrar los vectores de $\mathbb{R}^3$ que se transforman en el $(0,0)$ tenemos que encontrar la imagen de cualquier vector $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, y para ello necesitamos las coordenadas de cualquier $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ respecto de la base $B=\{(1,-1,0),(0,-1,2),(3,0,1)\}$,

$$(x,y,z)=\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(0,-1,2)+\lambda_3(3,0,1) \implies \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & x\\ -1 & -1 & 0 & y\\ 0 & 2 & 1 & z\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & x\\ 0 & -1 & 3 & x+y\\ 0 & 0 & 7 & 2x+2y+z\end{array}\right)$$

$$\implies \begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{7}(x-6y-3z)\\ \lambda_2=\frac{1}{7}(-x-y+3z)\\ \lambda_3=\frac{1}{7}(2x+2y+z)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\implies f(x,y,z) &= f(\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(0,-1,2)+\lambda_3(3,0,1))=\lambda_1(2,1)+\lambda_2(1,1)+\lambda_3(0,3)\\ &= \left(\frac{1}{7}(x-13y-3z),\frac{1}{7}(6x-y+3z)\right)\end{aligned}$$

$$\implies kerf:\begin{cases}x-13y-3z=0\\ 6x-y+3z=0\end{cases} \implies \begin{cases}x=2\alpha\\ y=\alpha\\ z=-\frac{11}{3}\alpha\end{cases} \implies \begin{matrix}B_{kerf}=\{(6,3,-11)\}\\ dimkerf=1\end{matrix} \implies f \text{ No Monomorf.}$$

b) $f(1,-1,0)=(2,1),\ f(0,-1,2)=(1,1),\ f(1,-2,2)=(-1,4),\ f(3,0,1)=(0,3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 2 & -1 & 4\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2\end{array}\right) \implies f(0,0,0)=(-4,2)\neq(0,0) \implies f \text{ No Homomorf.}$$

Ejemplo 1.9. Estudiar si existen homomorfismos tales que:

a) $f:\mathcal{P}_3(I\!R)\longrightarrow\mathcal{P}_2(I\!R)$ definida sobre $B=\{p_1(x)=1+x^2+2x^3, p_2(x)=1+x, p_3(x)=1+x^3, p_4(x)=x-x^3\}$ como $f(p_1)=x-1$, $f(p_2)=1+3x^2$, $f(p_3)=x^2$, $f(p_4)=1$. Tomamos coordenadas respecto de las bases usuales $B_{\mathcal{P}_3(I\!R)}=\{1,x,x^2,x^3\}$ y $B_{\mathcal{P}_2(I\!R)}=\{1,x,x^2\}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \implies f \text{ NO homomorf.}$$

b) $g:V\longrightarrow\mathcal{P}_2(I\!R)$ donde $V=L\{p_1,p_2,p_3\}$, definida como $g(p_1)=2x-3$, $g(p_2)=x^2-1$, $g(p_3)=1+x$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}1 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0\end{array}\right) \implies \begin{matrix}g \quad \text{homomorf.}\\ \text{sobre } V \text{ único}\end{matrix}$$

c) Extender la aplicación obtenida en el apartado b), a una aplicación lineal $g' : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $g'(p_i) = g(p_i)$, $i = 1, 2, 3$ y $\ker(g') = L\{x^2 + x + 1\}$.

$$\{p_1, p_2, p_3\} \quad l.i. \underset{\text{Th. ext. de la base}}{\Longrightarrow} \{p_1, p_2, p_3, p'_4 = 1 + x + x^2\} \text{ base de } \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \text{ ya que}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rango } 4 \Longrightarrow l.i.$$

A continuación, definimos $g' : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $g'(p_1) = g(p_1) = 2x - 3$, $g'(p_2) = g(p_2) = x^2 - 1$, $g'(p_3) = g(p_3) = 1 + x$ y $g'(1 + x + x^2) = 0$. Veamos cual es la imagen $g'(p(x))$ para cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \lambda_1(1 + x^2 + 2x^3) + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3(1 + x^3) + \lambda_4(1 + x + x^2)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_2 + \lambda_4)x + (\lambda_1 + \lambda_4)x^2 + (2\lambda_1 + \lambda_3)x^3$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = a_0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = a_1 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = a_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = a_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ \lambda_3 = 2a_0 - 2a_1 - a_3 \\ \lambda_2 = -a_0 + 2a_1 - a_2 + a_3 \\ \lambda_1 = -a_0 + a_1 + a_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow g'(p(x)) = \lambda_1 g'(1 + x^2 + 2x^3) + \lambda_2 g'(1 + x) + \lambda_3 g'(1 + x^3) + \lambda_4 g'(1 + x + x^2)$$

$$= (-a_0 + a_1 + a_3)(2x - 3) + (-a_0 + 2a_1 - a_2 + a_3)(x^2 - 1) + (2a_0 - 2a_1 - a_3)(1 + x)$$

$$= (6a_0 - 7a_1 + a_2 - 5a_3) + a_3x + (a_0 - 2a_1 + a_2 - a_3)x^2$$

1.2 Dimensión del Núcleo y la Imagen de una a.l.

Teorema 1.10. Sean V y W e.v. con dimV=n y $f : V \longrightarrow W$ a.l. Se verifica que: $dim\text{V} = dim\ker f + dim\text{Im} f$

Demostración: Supongamos $\ker f \neq \{\vec{0}\}$ y B=$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r\}$ base de $\ker f \Rightarrow \exists$ B'=$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ base de V. Vamos a demostrar que B"=$\{f(\vec{e}_{r+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\}$ base de Imf.

- B'=$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ s.g. de V $\Rightarrow f(B') = \{\vec{0}, f(\vec{e}_{r+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\}$ s.g. de Imf $\Rightarrow$ B" s.g.de Imf.
- $\alpha_{r+1}f(\vec{e}_{r+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0} \Rightarrow f(\alpha_{r+1}\vec{e}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_{r+1}\vec{e}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n \in ker f \Rightarrow \alpha_{r+1}\vec{e}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_r\vec{e}_r \Rightarrow \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_r\vec{e}_r - \alpha_{r+1}\vec{e}_{r+1} - \cdots - \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. En particular $\alpha_{r+1} = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ y por tanto B" l.i.

Supongamos $\ker f = \vec{0}$, sea B=$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ base de V y se demuestra que B'=$\{f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)\}$ base de Imf (la demostración se hace de forma análoga al caso anterior pero teniendo en cuenta que $f(\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n) = \vec{0}$ $\Rightarrow \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$). ■

Corolario 1.11. Sean V y W e.v. de dimensión n y $f : V \longrightarrow W$ a.l. Las siguientes afirmaciones son equivalentes: a) f biyectiva b) f inyectiva c) f suprayectiva

2 Matriz de una a.l.

Sean V y W e.v. de dimensión n y m respectivamente. Sea B=$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ base de V y B'=$\{\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_m\}$ base de W. Sea $f : V \longrightarrow W$ a.l. Dado un vector $\vec{x} \in$ V de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ respecto de B, vamos a construir las coordenadas de $f(\vec{x})$ respecto de B' dadas las coordenados de $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$ respecto de B'. Supongamos

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = y_1\vec{e'}_1 + \ldots + y_m\vec{e'}_m$$

y por otra parte

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n)$$

Sea

$$\left\{\begin{array}{l} f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e'}_1 + \ldots + a_{m1}\vec{e'}_m \\ f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e'}_1 + \ldots + a_{m2}\vec{e'}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e'}_1 + \ldots + a_{mn}\vec{e'}_m \end{array}\right.$$

Por tanto

$$\begin{array}{rcl} \vec{y} = f(\vec{x}) & = & x_1(a_{11}\vec{e'}_1 + \ldots + a_{m1}\vec{e'}_m) + \ldots + x_n(a_{1n}\vec{e'}_1 + \ldots + a_{mn}\vec{e'}_m) \\ & = & (x_1 a_{11} + \ldots + x_n a_{1n})\vec{e'}_1 + \ldots + (x_1 a_{m1} + \ldots + x_n a_{mn})\vec{e'}_m = y_1\vec{e'}_1 + \ldots + y_m\vec{e'}_m \end{array}$$

En consecuencia

$$^{1}\left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array}\right.$$

En forma matricial nos queda

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, \ldots\, a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, \ldots\, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2}\, \ldots\, a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A la matriz M(f;B,B') $= \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, \ldots\, a_{1n} \\ a_{21}\, a_{21}\, \ldots\, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2}\, \ldots\, a_{mn} \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de la a.l. f respecto de B y B'**.

Por tanto, la matriz de una a.l. se construye poniendo por columnas las coordenadas de los transformados de una base.

Ejemplo 2.1.

1. Sea $G_\alpha : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ un giro en el plano de centro $(0,0)$ y ángulo α (sentido positivo), se verifica que es una a.l., ya que da igual primero girar los vectores y luego sumarlos que primero sumarlos y luego girar, y lo mismo ocurre con el producto de un número real por un vector. Vamos a obtener la matriz del giro G_α respecto de la base canónica de $I\!R^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} G_\alpha(\vec{e}_1) = cos\alpha\,\vec{e}_1 + sen\alpha\,\vec{e}_2 \\ G_\alpha(\vec{e}_2) = cos(\alpha+\frac{\pi}{2})\,\vec{e}_1 + sen(\alpha+\frac{\pi}{2})\,\vec{e}_2 = -sen\alpha\,\vec{e}_1 + cos\alpha\,\vec{e}_2 \end{array}\right. \Longrightarrow G_\alpha(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}}_{M(G_\alpha,B_c,B_c)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Sea $\Pi = \{(x,y,z)/z=0\}$. La simetría, S_Π, en $I\!R^2$ respecto del plano Π es una aplicación lineal. La matriz de S_Π respecto de B_c es la siguiente

$$S_\Pi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1,\ S_\Pi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2,\ S_\Pi(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3 \Longrightarrow M(S_\Pi, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] A estas ecuaciones se les llama ecuaciones de la a.l. f respecto de las bases B y B'.

3. Sean $\Pi = \{(x,y,z)/z=0\}$ y $r = \{(x,y,z)/x=0, y=0\} \Rightarrow I\!R^3 = \Pi \oplus r$. Obtener las matrices de las proyecciones sobre Π y r respecto de la base canónica.

$$(x,y,z) = \overset{\in\Pi}{(x,y,0)} + \overset{\in r}{(0,0,z)} \Longrightarrow p_\Pi : \begin{array}{ccc} I\!R^3 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,0) \end{array} \quad \text{y} \quad p_r : \begin{array}{ccc} I\!R^3 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0,0,z) \end{array}$$

$$p_\Pi(1,0,0) = (1,0,0),\ p_\Pi(0,1,0) = (0,1,0),\ p_\Pi(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow M(p_\Pi, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_r(1,0,0) = (0,0,0),\ p_r(0,1,0) = (0,0,0),\ p_r(0,0,1) = (0,0,1) \Rightarrow M(p_r, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos la a.l. $f : \begin{array}{ccc} \Pi & \longrightarrow & I\!R^3 \\ \vec{s} & \mapsto & f(\vec{s}) = 3\vec{s} \end{array}$. Dar una base del plano Π (B_Π) y obtener la matriz de f respecto de B_Π y $B_c^{I\!R^3}$. Tomamos como base del plano la siguiente

$$B_\Pi = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \Longrightarrow M(f, B_\Pi, B_c^{I\!R^3}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Encontrar la matriz, respecto de las bases usuales en los correspondientes espacios vectoriales, de las siguientes aplicaciones lineales

(a) $f : \mathcal{M}_{2x2}(I\!R) \longrightarrow \mathcal{M}_{2x1}(I\!R)$ tal que $f(A) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Tomamos las bases usuales $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, $M(f,B,B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

(b) $g : \mathcal{M}_{2x2}(I\!R) \longrightarrow \mathcal{M}_{2x2}(I\!R)$ tal que $g(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A$

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $M(g, B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

(c) $h : \mathcal{P}_3(I\!R) \longrightarrow \mathcal{P}_3(I\!R)$ tal que $h(1) = x^2 + 1$, $h(x) = x + 2$, $h(x^2) = x^3 - x$, $h(x^3) = 1$. Tomamos como base usual de los polinomios $B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$.

$$M(h, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!R),\ p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \Rightarrow h(p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

(d) $k : \mathcal{P}_3(I\!R) \longrightarrow \mathcal{M}_{2x2}(I\!R)$ tal que $k(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c-d & a-b \end{pmatrix}$

$$k(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ k(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ k(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $M(k, B_c, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k(p) = M(k, B_c, B)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Veamos a continuación como dada la matriz de una aplicación lineal podemos construir el núcleo y la imagen de dicha a.l. y conocer las dimensiones. Sean V y W e.v. de dimensión n y m respectivamente, B base de V y B' base de W. Sea $f : V \longrightarrow W$ a.l. tal que A = M(f;B,B').

- Si rg(A) = k $\Longrightarrow$ *dim*Imf=k y *dim*kerf=n-k (n=*dim*V).
- Si rg(A) = m $\Longrightarrow$ f suprayectiva.
- Si rg(A) = n $\Longrightarrow$ f inyectiva.
- **Cálculo del kerf:** Tomamos $(x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas de $\vec{x} \in$ V respecto de B y resolvemos el sistema homogéneo $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (**Ecuaciones implícitas del ker$f$ respecto de B**). Las soluciones del sistema son las coordenadas respecto de B de los vectores del ker$f$.
- **Cálculo de la Imf:** Nos quedamos con las columnas de A que son l.i. y estas columnas son las coordenadas respecto de B' de los vectores de una base de la Imf.

Ejemplo 2.2.

1. Obtener, a partir de la matriz de la aplicación, el núcleo e imagen del homomorfismo $f:\mathcal{P}_3(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ tal que $f(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} a & a+b \\ c-d & a-b \end{pmatrix}$ (es el mismo homomorfismo que el último visto en el ejemplo anterior). Como ya hemos visto en el ejemplo 2.1 la matriz de esta aplicación lineal respecto de las bases usuales es,

$$M(f,B_c^{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})},B^{\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(a+bx+cx^2+dx^3)=M(f,B_c^{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})},B^{\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})})\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

   - Imf: las columnas de la matriz $M(f,B_c^{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})},B^{\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})})$ nos dan las coordenadas de los transformados de una base $\Rightarrow$ son las coordenadas de un sistema de generadores de Imf. Nos quedamos con las columnas que sean l.i.

   $$rgM(f,B_c^{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})},B^{\mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})})=3 \Longrightarrow \text{ hay tres columnas l.i.}$$

   Luego las ecuaciones paramétricas de la Imf, respecto de la base usual de las matrices $2x2$, son

   $$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{Imf}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

   - $kerf$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{B_c^{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Ecs. Implíc. de $kerf$ $\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=\lambda \\ d=\lambda \end{cases}$ Ecs. Paramét. de $kerf$

   $\Rightarrow B_{kerf}=\{x^2+x^3\}$

2. Sea $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por $f(a,b,c,d)=(a+b)x^2+bx+(c-d)$.

   - Calcular la matriz de la aplicación con respecto a las bases usuales ($B^{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}=\{1,x,x^2\}$).

   $$f(1,0,0,0)=x^2,\ f(0,1,0,0)=x^2+x,\ f(0,0,1,0)=1,\ f(0,0,0,1)=-1$$

   $$\Rightarrow M(f,B_c^{\mathbb{R}^4},B^{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   - Calcular ecuaciones implícitas de $kerf$ especificando una base.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=d \end{cases}\Rightarrow B_{kerf}=\{(0,0,1,1)\}$$

   - Razonar si es monomorfismo o epimorfismo: $kerf\neq\{(0,0,0,0)\}\Rightarrow f$ No Monomorfismo. Además, por el teorema de la dimensión, como $dimkerf=1$ se tiene que $dimImf=3\Rightarrow f$ Epimorfismo.

3 Operaciones con a.l.

Proposición 3.1. Sean V y W e.v. sobre $I\!K$, B y B' bases de V y W y sean $f:V\longrightarrow W$ y $g:V\longrightarrow W$ a.l. $\Longrightarrow \alpha f+\beta g:V\longrightarrow W$ es a.l. $\forall\ \alpha,\beta,\in I\!K$ y además, M(αf+βg;B,B')=αM(f;B,B')+βM(g;B,B')

Demostración: Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ base de V y $B' = \{\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_m\}$ base de W. Supongamos que

$$M_f(B,B') = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{coords. de} & \text{coords. de} \\ f(\vec{e}_1) \text{ en B'} & f(\vec{e}_n) \text{ en B'} \end{array} \qquad M_g(B,B') = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{coords. de} & \text{coords. de} \\ g(\vec{e}_1) \text{ en B'} & g(\vec{e}_n) \text{ en B'} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \alpha M_f(B,B') + \beta M_g(B,B') = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \ldots & \alpha a_{1n} + \beta b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} + \beta b_{m1} & \ldots & \alpha a_{mn} + \beta b_{mn} \end{pmatrix}} \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{coords. de} & \text{coords. de} \\ \alpha f(\vec{e}_1) + \beta g(\vec{e}_1) \text{ en B'} & \alpha f(\vec{e}_n) + \beta g(\vec{e}_n) \text{ en B'} \end{array} = M_{\alpha f + \beta g}(B,B')$$

■

Proposición 3.2. Sean $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow W$ a.l., B, B' y B" bases de U, V y W respectivamente. Se verifica que:

1. g∘f es a.l. y además, M(g∘f;B,B") = M(g;B',B") M(f;B,B')
2. Si f biyectiva $\Longrightarrow$ f^{-1} es a.l. de V en U y además M(f^{-1};B',B) = M(f;B,B')$^{-1}$.

Demostración:

1. Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ base de U, $B' = \{\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_m\}$ base de V y $B' = \{\vec{e}''_1, \ldots, \vec{e}''_p\}$ base de W. Sea

$$M_f(B,B') = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}} \\ \downarrow & \downarrow \\ f(\vec{e}_1)_{B'} & f(\vec{e}_n)_{B'} \end{array} \quad \text{y} \quad M_g(B',B'') = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \end{pmatrix}} \\ \downarrow & \downarrow \\ g(\vec{e}'_1)_{B''} & g(\vec{e}'_m)_{B''} \end{array}$$

Veamos como son las coordenadas de $g \circ f(\vec{e}_1), \ldots, g \circ f(\vec{e}_n)$ respecto de B'',

$$\begin{aligned} g(f(\vec{e}_1)) = g(a_{11}\vec{e}'_1 + \cdots + a_{m1}\vec{e}'_m) &= a_{11}(b_{11}\vec{e}''_1 + \cdots + b_{p1}\vec{e}''_p) + \cdots + a_{m1}(b_{1m}\vec{e}''_1 + \cdots + b_{pm}\vec{e}''_p) \\ &= (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{m1}b_{1m})\vec{e}''_1 + \cdots + (a_{11}b_{p1} + \cdots + a_{m1}b_{pm})\vec{e}''_p \\ &\vdots \\ g(f(\vec{e}_n)) = g(a_{1n}\vec{e}'_1 + \cdots + a_{mn}\vec{e}'_m) &= a_{1n}(b_{11}\vec{e}''_1 + \cdots + b_{p1}\vec{e}''_p) + \cdots + a_{mn}(b_{1m}\vec{e}''_1 + \cdots + b_{pm}\vec{e}''_p) \\ &= (a_{1n}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{1m})\vec{e}''_1 + \cdots + (a_{1n}b_{p1} + \cdots + a_{mn}b_{pm})\vec{e}''_p \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_g(B',B'')M_f(B,B') = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \end{pmatrix}} \\ \downarrow & \downarrow \\ g(\vec{e}'_1)_{B''} & g(\vec{e}'_m)_{B''} \end{array} \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}} \\ \downarrow & \downarrow \\ f(\vec{e}_1)_{B'} & f(\vec{e}_n)_{B'} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+\cdots+b_{1m}a_{m1} & \ldots & b_{11}a_{1n}+\cdots+b_{1m}a_{mn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1}a_{11}+\cdots+b_{pm}a_{m1} & \ldots & b_{p1}a_{1n}+\cdots+b_{pm}a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \qquad\qquad & \downarrow \\ g(f(\vec{e}_1))_{B''} & & g(f(\vec{e}_n))_{B''} \end{array} \end{array} = M_{g\circ f}(B,B'')$$

2. f biyectiva $\iff \exists f^{-1}$ tal que $f^{-1}\circ f = Id_U$, $f\circ f^{-1} = Id_V$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{nxn} = M(Id_U,B,B) = M(f^{-1}\circ f,B,B) = M(f^{-1},B',B)M(f,B,B')$$

$\Longrightarrow M(f^{-1},B',B) = M(f,B,B')^{-1} \Longrightarrow M(f,B,B')$ y $M(f^{-1},B',B)$ son matrices cuadradas de orden n

Análogamente $I = M(Id_V,B',B') = M(f\circ f^{-1},B',B') = M(f,B,B')M(f^{-1},B',B)$.

■

Corolario 3.3. Sean V y W e.v. de dimensión n; $f: V \longrightarrow W$ Isomorfismo $\iff$ M(f;B,B') Invertible $\forall$ B, B' bases de V y W $\iff$ rg(M(f;B,B')) = n $\forall$ B, B' bases de V y W.

Ejemplo 3.4. Sea V espacio vectorial de dimensión 2, $B=\{e_1,e_2\}$ base de V y f y g aplicaciones lineales de V en V definidas por las ecuaciones: $\begin{cases} f(e_1) = -3e_1+e_2 \\ f(e_2) = e_1-e_2 \end{cases}$ $\begin{cases} g(e_1) = e_1+e_2 \\ g(e_2) = e_1 \end{cases}$ Encontrar las ecuaciones matriciales que definen a las aplicaciones lineales f, g, $f\circ g$, $g\circ f$, $2f^2-3g^2$.

$M_f(B,B) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_g(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{f\circ g}(B,B) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_{g\circ f}(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{2f^2-3g^2}(B,B) = 2\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Cambio de base en un e.v.

Sea V un e.v. de dimensión n y sean B=$\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ y B'=$\{\vec{e'}_1,\ldots,\vec{e'}_n\}$ dos bases de V. Para todo $\vec{x}\in$ V, $\vec{x}$=$x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n$= $x'_1\vec{e'}_1+\ldots+x'_n\vec{e'}_n$. Consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \text{Id}: & V & \longrightarrow & V \\ & \vec{x} = x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n & \rightarrow & x'_1\vec{e'}_1+\ldots+x'_n\vec{e'}_n = \vec{x} \end{array}$$

Su matriz será

$$\text{M(Id;B,B')} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{coords. de} & \text{coords. de} \\ Id(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 & Id(\vec{e}_n) = \vec{e}_n \\ \text{en B'} & \text{en B'} \end{array} \end{array}$$

siendo

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = a_{11}\vec{e'}_1+\ldots+a_{n1}\vec{e'}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n = a_{1n}\vec{e'}_1+\ldots+a_{nn}\vec{e'}_n \end{cases}$$

A la matriz **M(Id,B,B')** le llamaremos **matriz de cambio de base de B a B'** y la notaremos **MC(B,B')** o **C(B,B')**.

Dadas las coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ de un vector $\vec{x}\in$V respecto de la base B, las coordenadas $(x'_1,\ldots,x'_n)$ de $\vec{x}$ respecto de B' las obtendremos mediante la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B}$$

A estas ecuaciones se les llama ecuaciones del cambio de base de B a B'.

Observación: La matriz de un cambio de base siempre es Invertible, ya que es la matriz del isomorfismo identidad, y su inversa es la matriz del cambio contrario, i.e. M(Id;B,B')$^{-1}$=M(Id;B',B) $(MC(B,B')^{-1} = MC(B',B))$.

Ejemplo 4.1.

1. Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_2 para las siguientes bases:

   a) $B_1 = \{e_1 = (1,-1), e_2 = (3,1)\}$, $B_2 = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$

   $$MC(B_1,B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) $B_1 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, $B_2 = \{u_1 = (2,3,4), u_2 = (1,2,6), u_3 = (1,3,5)\}$

   $$MC(B_2,B_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow MC(B_1,B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -10 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

2. En $\mathbb{R}^3$, dadas las bases $B = \{(1,-1,3),(0,1,-1),(0,3,-2)\}$ y $B' = \{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,4,7)\}$, calcular las ecuaciones del cambio de base de B' a B.

   $$\underset{B'}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{B}{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow M_{Id}(B',B) = M_{Id}(B_c,B)M_{Id}(B',B_c) = M_{Id}(B,B_c)^{-1}M_{Id}(B',B_c)$$

   $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.2. Sean V y W e.v., $f: V \longrightarrow W$ a.l., B$_1$ y B$_1'$ bases de V, y B$_2$ y B$_2'$ bases de W. Sea M(f;B$_1'$,B$_2'$) la matriz de f respecto de las bases B$_1'$ y B$_2'$. Entonces, se verifica que la matriz de f respecto de las bases B$_1$ y B$_2$ es M(f;B$_1$,B$_2$)=MC(B$_2'$,B$_2$) M(f;B$_1'$,B$_2'$) MC(B$_1$,B$_1'$)

$$\begin{array}{ccc} \overset{B_1'}{V} & \xrightarrow{f} & \overset{B_2'}{W} \\ {\scriptstyle Id_V}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle Id_W} \\ \overset{B_1}{V} & \xrightarrow{f} & \overset{B_2}{W} \end{array} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} M(f;B_1,B_2) &= M(Id_W \circ f \circ Id_V; B_1,B_2) \\ &= M(Id_W; B_2', B_2)M(f;B_1',B_2')M(Id_V;B_1,B_1') \\ &= MC(B_2',B_2)M(f;B_1',B_2')MC(B_1,B_1') \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que cumple: $f(1,1,1) = (1,1,0)$, $f(-1,1,1) = (0,0,1)$, $f(-1,-2,1) = (0,0,0)$.

a) Obtener la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Tomamos $B = \{(1,1,1), (-1,1,1), (-1,-2,1)\}$ que es base de $\mathbb{R}^3$ (tiene que serlo, si no f No perfectamente definido). Por tanto, $A = M_f(B, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $MC(B, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \overset{B}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{f} & \overset{B_c}{\mathbb{R}^3} \\ {\scriptstyle Id_{\mathbb{R}^3}} \uparrow & \nearrow f & \\ \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} & & \end{array} \Longrightarrow M_f(B_c, B_c) = M_f(B, B_c) M_{Id_{\mathbb{R}^3}}(B_c, B) = A\, MC(B_c, B) = A\, MC(B, B_c)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación: El diagrama anterior también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} \overset{B}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] & \overset{B_c}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "C(B_c, B_c)"] \\ \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "C(B_c, B)"] \arrow[r, "f"'] & \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

Luego $M_f(B_c, B_c) = MC(B_c, B_c) M_f(B, B_c) MC(B_c, B) = I\, A\, MC(B_c, B) = A\, MC(B, B_c)^{-1}$.

b) Obtener la matriz de f respecto de la base $B = \{(1,1,1), (-1,1,1), (-1,-2,1)\}$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{B}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{f} & \overset{B_c}{\mathbb{R}^3} \\ & f \searrow & \downarrow {\scriptstyle Id_{\mathbb{R}^3}} \\ & & \underset{B}{\mathbb{R}^3} \end{array} \Longrightarrow M_f(B, B) = M_{Id_{\mathbb{R}^3}}(B_c, B) M_f(B, B_c) = MC(B_c, B)\, A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación: El diagrama anterior también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} \overset{B}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] & \overset{B_c}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "C(B_c, B)"] \\ \underset{B}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "C(B, B)"] \arrow[r, "f"'] & \underset{B}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

Luego $M_f(B, B) = MC(B_c, B) M_f(B, B_c) MC(B, B) = MC(B_c, B)\, A\, I = MC(B, B_c)^{-1} A$.

Ejemplo 4.4. En $\mathbb{R}^3$ sea el s.v. $S = \{(x, y, z)/x - y + 2z = 0\}$. Obtener las ecuaciones de la simetría $f_S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto del s.v. S. Si no se dice lo contrario las ecuaciones hay que darlas en la base canónica.

Tomamos una base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, tal que $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in S$ y $\vec{u}_3$ perpendicular a S. Por tanto,

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1, f(\vec{u}_2) = \vec{u}_2, f(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3 \Longrightarrow M(f_S, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $B = \{\vec{u}_1 = (1,1,0), \vec{u}_2 = (0,2,1), \vec{u}_3 = (1,-1,2)\}$,

$$\begin{array}{ccc} \overset{B}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{f_S} & \overset{B}{\mathbb{R}^3} \\ {\scriptstyle Id}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle Id} \\ \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow[f_S]{} & \underset{B_c}{\mathbb{R}^3} \end{array} \Longrightarrow M(f_S, B_c, B_c) = M(Id \circ f_S \circ Id, B_c, B_c) = MC(B, B_c)M(f_S, B, B)MC(B_c, B)$$

$$\Longrightarrow M(f_S, B_c, B_c) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{M(f_S, B, B_c)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow f_S(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + y - 2z, x + 2y + 2z, -2x + 2y - z)$$

5 Determinantes

Definición 5.1. Sea A una matriz nxn. Se llama menor de orden $n-1$ al determinante de la submatriz de A que se obtiene suprimiendo una fila y una columna de A. Notamos M_{ij} al menor de orden $n-1$ que resulta al suprimir la fila i y la columna j en A y llamamos adjunto del elemento a_{ij} al número $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $1 \le i, j \le n$.

Definición 5.2. Sea A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se define el **determinante** de la matriz A como,

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si A=$(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ es una matriz nxn, $\forall n > 2$ se define el **determinante** de A como,

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \quad \text{(desarrollo por la fila 1)}$$

Propiedades 5.3. Sea A una matriz nxn:

i) Si todos los elementos de una fila (o columna) de A son cero, $det(A) = 0$.

ii) Si B es la matriz que resulta de multiplicar todos los elementos de una fila (o una columna) de A por un escalar λ, $det(B) = \lambda det(A)$.

iii) Si $A_1, \ldots, A_n$ son las columnas de la matriz A y $A_j = B + C$ siendo B y C vectores columna $nx1$,

$$det(A^1, \ldots, B + C, \ldots, A^n) = det(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n) + det(A^1, \ldots, C, \ldots, A^n)$$

Análogamente se verifica el resultado para filas.

iv) $det(A^t) = det(A)$.

v) Si B es la matriz obtenida permutando en A dos filas (o columnas), $det(B) = -det(A)$.

vi) Si dos filas (o columnas) de A son iguales, $det(A) = 0$.

vii) Si B es la matriz que resulta de sumar a una fila (o columna) de A otra multiplicada por un escalar λ, $det(B) = det(A)$.

viii) $det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}A_{lj}$, $1 \le i, j \le n$ (Desarrollo por la fila i ó por la columna j).

Corolario 5.4. Sea A $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se verifica que el **determinante** de la matriz A es,

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11})$$

Teorema 5.5. Una matriz A nxn es No Invertible (singular) si y sólo si $det(A) = 0$.

Proposición 5.6. Sean A y B matrices nxn se verifica que $det(AB) = det(A)det(B)$.

6 Diagonalización de Matrices y Endomorfismos

Sea A$\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!R)$. $\lambda \in I\!R$ es **autovalor** o **valor propio** de A $\iff \exists \vec{x} \in I\!R^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Al vector $\vec{x}$ le llamaremos **autovector** o **vector propio** asociado a λ.

Luego, buscamos $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff (A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ para algún $\vec{x} \neq \vec{0} \iff$ El sistema $(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ tiene solución distinta de la trivial $\iff$ rg$(A-\lambda I) < n \iff A - \lambda I$ es No invertible $\iff$ det$(A-\lambda I) = 0$.

Por tanto, los autovalores de la matriz A son las raíces reales del polinomio $p(\lambda) = det(A-\lambda I) = 0$, llamado **Polinomio Característico**, y los autovectores asociados al autovalor λ, son las soluciones No nulas del sistema homogéneo $(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$; es decir, los vectores No nulos del núcleo de la a.l. asociada a la matriz $A - \lambda I$ ($f_{A-\lambda I} : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ tal que $f_{A-\lambda I}(\vec{x}) = (A-\lambda I)\vec{x}$).

Observación: Si A$\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!R)$ entonces $p(\lambda) = det(A-\lambda I)$ es un polinomio con coeficientes reales de grado n en λ y por tanto a lo sumo tiene n raíces reales.

Definición 6.1. Al conjunto de todos los autovalores se llama **Espectro** de A y se nota $\sigma(A)$. Se llama **Subespacio Propio** asociado al autovalor λ a todos los autovectores asociados a λ más el $\vec{0}$; es decir, a las soluciones del sistema homogéneo $(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, $S_\lambda = \{\vec{x}/(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}\} = kerf_{A-\lambda I} \equiv ker(A-\lambda I)$ es s.v. de $I\!R^n$.

Teorema 6.2. Autovectores correspondientes a autovalores todos distintos son l.i.

Demostración: Supongamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ autovalores distintos (dos a dos) de la matriz A y sean $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ autovectores asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Vamos a demostrar que el conjunto $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m\}$ es l.i. por inducción sobre m. Para $m = 1$ es trivial que $\{\vec{x}_1\}$ es l.i. pues todo autovector es distinto de $\vec{.}$ Supongamos el resultado cierto para $m-1$, veamos que ocurre para m: sea $\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_m\vec{x}_m = \vec{0} \Longrightarrow A(\alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_m\vec{x}_m) = \vec{0}$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1}\vec{x}_{m-1} + \alpha_m\lambda_m\vec{x}_m = \vec{0} \\ \alpha_1\lambda_m\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_m\vec{x}_{m-1} + \alpha_m\lambda_m\vec{x}_m = \vec{0} \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\vec{x}_{m-1} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0, \ldots, \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$$

$$\Longrightarrow \text{ como los } \lambda_i \text{ son distintos, se tiene } \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{m-1} = 0 \Longrightarrow \alpha_m\vec{x}_m = \vec{0} \underset{\vec{x}_m \neq \vec{0}}{\Longrightarrow} \alpha_m = 0$$

. ■

Por tanto, reuniendo bases de los subespacios propios obtendremos autovectores l.i., si conseguimos n tendremos una base B*=$\{\vec{e*}_1, \ldots, \vec{e*}_n\}$ de $I\!R^n$ formada por autovectores de A. Si tomamos P la matriz cuyas columnas son $\vec{e*}_1, \ldots, \vec{e*}_n$, entonces P será un cambio de base de B* a B$_c$ y se verifica que A$\vec{e*}_i$=$\lambda_i\vec{e*}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego se verifica que

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

siendo P una matriz invertible, ya que es la matriz de un cambio de base. De esta forma tenemos la siguiente definición de matriz diagonalizable.

Una **Matriz** cuadrada A$\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!R)$ es **diagonalizable** $\iff$ existe una matriz P$\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!R)$ Invertible tal que P^{-1}AP es una matriz diagonal $\iff$ A tiene n autovalores (puede haber repeticiones) y asociados a ellos podemos obtener n autovectores l.i.

Ejemplo 6.3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular autovalores y autovectores de A. Comprobar que reuniendo las bases de los subespacios propios se puede obtener P invertible (matriz de cambio de base) tal que $P^{-1}AP$ diagonal.

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \Longrightarrow \sigma(A) = \{1,1,2\}$$

$$S_{\lambda=1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A - 1I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{(x,y,z)/x = -z\} = L\{(1,0,-1),(0,1,0)\} \text{ (dimensión de } S_{\lambda=1}\text{=2)}$$

$$S_{\lambda=2} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -2z \end{cases} \Longrightarrow S_{\lambda=2} = L\{(2,2,-1)\}$$

Por tanto, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 6.4. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular autovalores y autovectores de A. Observar que reuniendo las bases de los subespacios propios No obtenemos una base de $I\!R^3 \Longrightarrow$ A No diagonalizable.

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2) \Longrightarrow \sigma(A) = \{1,1,2\}$$

$$S_{\lambda=1} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \gamma \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow S_{\lambda=1} = L\{(0,1,0)\} \text{ (dimensión de } S_{\lambda=1}\text{=1)}$$

$$S_{\lambda=2} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -3z \end{cases} \Longrightarrow S_{\lambda=2} = L\{(2,3,-1)\} \text{ (dimensión de } S_{\lambda=2}\text{=1)}$$

Luego como las dimensiones de $S_{\lambda=1}$ y $S_{\lambda=2}$ son 1, reuniendo las bases de $S_{\lambda=1}$ y $S_{\lambda=2}$ NO obtenemos una base de todo $\mathbb{R}^3$.

Sea V un e.v. real con dimV=n; $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, B una base de V. En esta sección vamos a considerar siempre la matriz de f respecto de una misma base B en el espacio de partida y en el de llegada, es decir M(f;B,B) y escribiremos M$_f$(B).

Propiedades 6.5. El polinomio característico de la matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, es siempre el mismo.

Demostración: Sean B y B' bases de V y sean $M_f(B)$ y $M_f(B') \Longrightarrow M_f(B') = C(B,B')M_f(B)C(B',B)$

$$\begin{array}{ccc} \overset{B}{V} & \xrightarrow{f} & \overset{B}{V} \\ {\scriptstyle Id}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ \underset{B'}{V} & \xrightarrow[f]{} & \underset{B'}{V} \end{array}$$

Si $P = C(B',B) \Longrightarrow M_f(B') = P^{-1}M_f(B)P$. Luego el polinomio característico de $M_f(B')$ es

$$p(M_f(B')) = det(M_f(B') - \lambda I) = det(P^{-1}M_f(B)P - \lambda P^{-1}P) = det(P^{-1})det(M_f(B))det(P)$$

$$= \frac{1}{det(P)}det(M_f(B))det(P) = det(M_f(B))$$

■

Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, B una base cualquiera de V y $M_f(B)$. $\lambda \in I\!R$ es **autovalor** o **valor propio** de $f \iff \exists \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \iff$ (Identificando coordenadas respecto de B con vectores) $\exists \vec{x}_B \in I\!R^n, \vec{x}_B \neq \vec{0}$ tal que $M_f(B)\vec{x}_B = \lambda\vec{x}_B$. Al vector $\vec{x} \in V$ le llamaremos **autovector** o **vector propio** asociado a λ.

Como consecuencia de la propiedad 6.5 los autovalores de un endomorfismo f son los mismos respecto de cualquier base; es decir, $\sigma(f) = \sigma(M_f(B))$ con B=$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ cualquier base de V; y para calcular los autovectores resolveremos el sistema $(M_f(B) - \lambda I)\vec{x}_B = \vec{0}$ cuyas soluciones No nulas son las coordenadas respecto de B de los autovectores asociados a λ. Así, $S_\lambda = \{\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \in V / (M_f(B) - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = \vec{0}\}$

De esta forma tenemos la siguiente definición de endomorfismo diagonalizable.

Un **Endomorfismo** f es **diagonalizable** $\iff \exists$ B*=$\{\vec{e}*_1, \dots, \vec{e}*_n\}$ base de V tal que M$_f$(B*) es una matriz diagonal D=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, es decir si existen B*=$\{\vec{e}*_1, \dots, \vec{e}*_n\}$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset I\!R$ (puede haber repeticiones) tal que $f(\vec{e}*_i) = \lambda_i\vec{e}*_i \quad \forall i = 1 \dots n \iff M_f(B)$, con B cualquier base de V, tiene n autovalores y asociados a ellos n autovectores l.i.

6.1 Algoritmo de Diagonalización

Sea V un e.v. real con dimV=n, $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo y A=$M_f(B)$ con B base cualquiera de V. Para diagonalizar seguiremos los siguientes pasos:

- Resolvemos la ecuación $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Si alguna raíz es No real, entonces f (ó A) es No diagonalizable.

- Para cada autovalor λ (raíz real de $p(\lambda)$) se obtiene el subespacio propio S_λ resolviendo el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ y se comprueba que $dimS_\lambda$=ma(λ) (ma(λ)=multiplicidad de λ como raíz del polinomio $p(\lambda)$). Si algún autovalor λ No verifica esta condición, f (ó A) es No diagonalizable.

- La base B* en la cual el endomorfismo es diagonalizable es la formada por la unión de las bases de los subespacios propios y la matriz diagonal está formada por los autovalores asociados a cada autovector de la base B*, en el mismo orden. Así, la matriz P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal es aquella cuyas columnas son las coordenadas respecto de B de los autovectores de la base B*, es decir la matriz del cambio de base; y la diagonal son los autovalores en el mismo orden.

Ejemplo 6.6. Diagonalizar, si es posible, los siguientes endomorfismos de $\mathbb{R}^3$:

a) $f(x,y,z) = (x-y+z, 2y-z, z)$. Por tanto, $M_f(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda-2)$ y

$\sigma(f) = \{1,1,2\}$. Para cada autovalor λ vamos a obtener el subespacio propio correspondiente.

$$S_{\lambda=1}: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = z \Longrightarrow B_{S_{\lambda=1}} = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

$$S_{\lambda=2}: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -y \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow B_{S_{\lambda=2}} = \{(1,-1,0)\}$$

Por tanto, $B = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,-1,0)\}$ base de autovectores de forma que

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}M_f(B_c)P \text{ con } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = MC(B, B_c)$$

b) $f(x,y,z) = (x-y+3z, y-3z, -z) \Longrightarrow M_f(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$,

$\sigma(f) = \{1,1,-1\}$.

$$S_{\lambda=1}: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow B_{S_{\lambda=1}} = \{(1,0,0)\}$$

$$\Longrightarrow dimS_{\lambda=1} = 1 \text{ y } ma(\lambda = 1) = 2 \Longrightarrow f \text{ No diagonalizable}$$

Observación: Sea A$\in \mathcal{M}_{nxn}(I\!R)$

$$\text{p}(\lambda)=(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + det(A)$$

Además si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son las raíces del polinomio $p(\lambda)$ se verifica que

$$\text{tr(A)}=\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = tr(P^{-1}AP) \quad \text{y} \quad \text{det(A)}= \lambda_1 \cdots \lambda_n = det(P^{-1}AP)$$

Por tanto, como el polinomio característico de la matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, es siempre el mismo se tiene que, la traza y el determinante de la matriz de un endomorfismo, respecto de cualquier base, son siempre los mismos. Es decir, son invariantes frente al cambio de base.

$$\text{tr(A)}=\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \text{tr(P}^{-1}\text{AP)} \quad \text{y} \quad \text{det(A)}= \lambda_1 \cdot\cdots \lambda_n = \text{det(P}^{-1}\text{AP)}$$